DIÁLOGO A MÊNON

Segundo Fowler [1] pág. 7, essa parte do diálogo *Mênon* é o primeiro texto direto que conhecemos sobre a matemática grega. Data provavelmente de 385 a. C. Escritos mais antigos não sobreviveram, e são conhecidos apenas através de referências de terceiros.

Neste presente texto estaremos examinando a parte do diálogo de Mênon que mais diz respeito à História da Matemática. Faremos alguns comentários sobre os argumentos utilizados. Não nos deteremos nos aspectos gnosiológicos e pedagógicos do diálogo, mas naturalmente temos aqui um exemplo do chamado "método socrático".

Começamos apresentando a parte do diálogo que alguns especialistas intitulam *Teoria da Reminiscência*. Abaixo transcrevemos [3] páginas 56 a 60.

O Diálogo

Mênon: - Seja, Sócrates! Entretanto, o que é que te leva a dizer que nada aprendemos e que o que chamamos de saber nada mais é do que recordação? Poderias provar-me isso?
Sócrates: - Não faz muito, excelente Mênon, que te chamei de habilidoso! Perguntas se te posso ensinar, quando agora mesmo afirmei claramente que não há ensino, mas apenas reminiscência; estás procurando precipitar-me em contradição comigo mesmo!
Mênon: - Não, por Zeus, caro Sócrates! Não foi com essa intenção que fiz a pergunta, mas apenas levado pelo hábito. Todavia, se te é possível mostrar-me de qualquer modo que as coisas de fato se passam assim como o dizes, demonstra-mo, pois esse é o meu desejo!
Sócrates: - Não é uma tarefa fácil o que pedes; fá-la-ei, entretanto, de boa vontade, por se tratar de ti. Chama a qualquer um dos escravos que te acompanham, qualquer um que queiras, a fim de que por meio dele eu possa fazer a demonstração que pedes.
Mênon: - Com prazer. (Dirigindo-se a um de seus escravos moços): Aproxima-te!
Sócrates: - Ele é grego e fala grego?
Mênon: - Sim; nasceu em minha casa.
Sócrates: - Então, caro Mênon, presta bem atenção, e examina com cuidado se o que ele faz com meu auxílio é recordar-se ou aprender.
Mênon: - Observarei com cuidado.
Sócrates: - (Voltando-se para o escravo ao mesmo tempo que traça no solo as figuras necessárias à sua demonstração): Dize-me, rapaz: sabes o que é um

quadrado?
Escravo: - Sei.
Sócrates: - Não é uma figura, como esta, de quatro lados iguais?
Escravo: - É.
Sócrates: - E estas linhas, que cortam o quadrado pelo meio, não são também iguais?
Escravo: - São.
Sócrates: - Esta figura poderia ser maior ou menor, não poderia?
Escravo: - Poderia.
Sócrates: - Se, pois, este lado mede dois pés e este também dois pés, quantos pés terá a superfície deste quadrado? Repara bem: se isto for igual a dois pés e isso igual a um pé, a superfície não terá de ser o resultado de uma vez dois pés?
Escravo: - Terá.
Sócrates: - Mas este lado mede também dois pés; portanto a superfície não é igual a duas vezes dois pés?
Escravo: - É.
Sócrates: - A superfície por conseguinte mede duas vezes dois pés?
Escravo: - Mede.
Sócrates: - E quanto iguala duas vezes dois pés? Conta e dize!
Escravo: - Quatro, Sócrates.
Sócrates: - E não nos seria possível desenhar aqui uma outra figura, com área dupla e de lados iguais como esta?
Escravo: - Sim, seria.
Sócrates: - E quantos pés, então, mediria a sua superfície?
Escravo: - Oito.
Sócrates: - Bem; experimenta agora responder ao seguinte: que comprimento terá cada lado da nova figura? Repara: o lado deste mede dois pés, quanto medirá, então, cada lado do quadrado de área dupla?
Escravo: - É claro que mede o dobro daquele.
Sócrates: - (A Mênon): Vês, caro Mênon, que nada ensino, e que nada mais faço do que interrogá-lo? Este rapaz agora pensa que sabe quanto mede a linha lateral que formará o quadrado de oito pés. És da minha opinião?
Mênon: - Sou.
Sócrates: - Mas crês que ele de fato saiba?
Mênon: - Não, não sabe.
Sócrates: - Mas ele está convencido de que o quadrado de área dupla tem também o lado duplo, não é?
Mênon: - Está, sem dúvida.
Sócrates: - Observa como ele irá recordando pouco a pouco, de maneira exata. Responde-me (disse voltando-se para o escravo): tu dizes que uma linha dupla dá origem a uma superfície duas vezes maior? Compreende-me bem: não falo de uma superfície longa de um lado e curta de outro. O que procuro é uma superfície como esta, igual em todos os sentidos, mas que possua uma

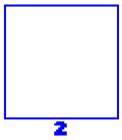
extensão dupla, ou mais exatamente, de oito pés. Repara agora se ela resultará do desdobramento da linha.
Escravo: - Creio que sim.
Sócrates: - Será, pois, sobre esta linha que se construirá a superfície de oito pés, se traçarmos quatro linhas semelhantes?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - Desenhemos então os quatro lados. Esta é a superfície de oito pés?
Escravo: - É.
Sócrates: - E agora? Não se encontram, porventura, dentro dela estas quatro superfícies, das quais cada uma mede quatro pés?
Escravo: - É verdade!...
Sócrates: - Mas então? Qual é esta área? Não é o quádruplo?
Escravo: - Necessariamente.
Sócrates: - O duplo e o quádruplo são a mesma coisa?
Escravo: - Nunca, por Zeus!
Sócrates: - E que são, então?
Escravo: - Duplo significa duas vezes; e quádruplo, quatro vezes.
Sócrates: - Por conseguinte, esta linha é o lado de um quadrado cuja área mede quatro vezes a área do primeiro?
Escravo: - Sem dúvida.
Sócrates: - E quatro vezes quatro dá dezesseis, não é?
Escravo: - Exatamente.
Sócrates: - Mas, então, qual é o lado do quadrado da área dupla? Este lado dá o quádruplo, não dá?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - A superfície de quatro pés quadrados tem lados de dois pés?
Escravo: - Tem.
Sócrates: - O quadrado de oito pés quadrados é o dobro do quadrado de quatro e a metade do quadrado de dezesseis pés, não é?
Escravo: - É.
Sócrates: - E seu lado, então, não será maior do que o lado de um e menor do que o de outro desses dois quadrados?
Escravo: - Será.
Sócrates: - Bem; responde-me: este lado mede dois pés e este quatro?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - Logo, o lado da superfície de oito pés quadrados terá mais do que dois e menos do que quatro pés.
Escravo: - Tem.
Sócrates: - Experimenta, então, reponder-me: qual é o comprimento desse lado?
Escravo: - Três pés.
Sócrates: - Pois bem: se deve medir três pés, deveremos acrescentar a essa linha a metade. Não temos três agora? Dois pés aqui, e mais um aqui. E o mesmo faremos neste lado. Vê!, agora temos o quadrado de que falaste.

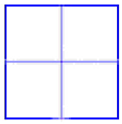
Escravo: - Ele mesmo.
Sócrates: - Repara, entretanto: medindo este lado três pés e o outro também pés, não se segue que a área deve ser três pés vezes três pés?
Escravo: - Assim penso.
Sócrates: - E quanto é três vezes três?
Escravo: - Nove.
Sócrates: - E quantos pés deveria medir a área dupla?
Escravo: - Oito.
Sócrates: - Logo a linha de três pés não é o lado do quadrado de oito pés, não é?
Escravo: - Não, não pode ser.
Sócrates: - E então? Afinal, qual é o lado do quadrado sobre que estamos discutindo? Vê se podes reponder a isso de modo correto! Se não queres fazê-lo por meio de contas, traça pelo menos na areia a sua linha.
Escravo: - Mas, por Zeus, Sócrates, não sei!
Sócrates: - (Voltando-se para Mênon): Reparaste, caro Mênon, os progressos que a sua recordação fez? Ele de fato nem sabia e nem sabe qual é o comprimento do lado de um quadrado de oito pés quadrados; entretanto, no início da palestra, acreditava saber, e tratou de responder categoricamente, como se o soubesse; mas agora está em dúvida, e tem apenas a convicção de que não o sabe!
Mênon: - Tens razão.
Sócrates: - E agora não se encontra ele, não obstante, em melhores condições relativamente ao assunto?
Mênon: - Sem dúvida!
Sócrates: - Despertando-lhe dúvidas e paralisando-o como a tremelga, acaso lhe causamos algum prejuízo?
Mênon: - De nenhum modo!
Sócrates: - Sim, parece-me que fizemos uma coisa que o ajudará a descobrir a verdade! Agora ele sentirá prazer em estudar este assunto que não conhece, ao passo que há pouco tal não faria, pois estava firmemente convencido de que tinha toda razão de dizer e repetir diante de todos que a área dupla deve ter o lado duplo!
Mênon: - É isso mesmo.
Sócrates: - Crês que anteriormente a isto ele procurou estudar e descobrir o que não sabia, embora pensasse que o sabia? Agora, porém, está em dúvida, sabe que não sabe e deseja muito saber!
Mênon: - Com efeito.
Sócrates: - Diremos, então, que lhe foi vantajosa a paralisação?
Mênon: - Como não!
Sócrates: - Examina, agora, o que em seguida a estas dúvidas ele irá descobrir, procurando comigo. Só lhe farei perguntas; não lhe ensinarei nada! Observa bem se o que faço é ensinar e transmitir conhecimentos, ou apenas perguntar-lhe o que sabe. (E, ao escravo): Responde-me: não é esta a figura de nosso

quadrado cuja área mede quatro pés quadrados?
Escravo: - É.
Sócrates: - A este quadrado não poderemos acrescentar este outro, igual?
Escravo: - Podemos.
Sócrates: - E este terceiro, igual aos dois?
Escravo: - Podemos.
Sócrates: - E não poderemos preencher o ângulo com outro quadrado, igual a estes três primeiros?
Escravo: - Podemos.
Sócrates: - E não temos agora quatro áreas iguais?
Escravo: - Temos.
Sócrates: - Que múltiplo do primeiro quadrado é a grande figura inteira?
Escravo: - O quádruplo.
Sócrates: - E devíamos obter o dobro, recordaste?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - E esta linha traçada de um vértice a outro da cada um dos quadrados interiores não divide ao meio a área de cada um deles?
Escravo: - Divide.
Sócrates: - E não temos assim quatro linhas que constituem uma figura interior?
Escravo: - Exatamente.
Sócrates: - Repara, agora: qual é a área desta figura?
Escravo: - Não sei.
Sócrates: - Vê: dissemos que cada linha nestes quatro quadrados dividia cada um pela metade, não dissemos?
Escravo: - Sim, dissemos.
Sócrates: - Bem; então quantas metades temos aqui?
Escravo: - Quatro.
Sócrates: - E aqui?
Escravo: - Duas.
Sócrates: - E em que relação aquelas quatro estão para estas duas?
Escravo: - O dobro.
Sócrates: - Logo, quantos pés quadrados mede esta superfície?
Escravo: - Oito.
Sócrates: - E qual é seu lado?
Escravo: - Esta linha.
Sócrates: - A linha traçada no quadrado de quatro pés quadrados, de um vértice a outro?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - Os sofistas dão a esta linha o nome de diagonal e, por isso, usando esse nome, podemos dizer que a diagonal é o lado de um quadrado de área dupla, exatamente como tu, ó escravo de Mênon, o afirmaste.
Escravo: - Exatamente, Sócrates!

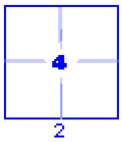
Comentários

Vamos acompanhar detidamente as figuras sugeridas pelo diálogo, e ver como Sócrates, através de um diálogo "socrático", conduz o jovem para a compreensão do resultado. Ou então, como afirma, ajuda o jovem a se lembrar de algo que já sabia.

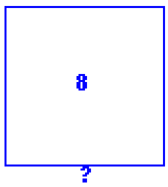




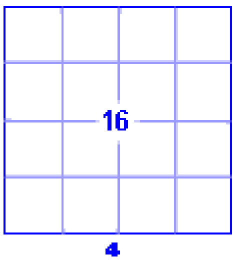
Sócrates desenha para o escravo um quadrado com lado igual a 2 pés. O escravo concorda que o quadrado é dividido ao meio pelo segmento que une os pontos médios de dois lados opostos.



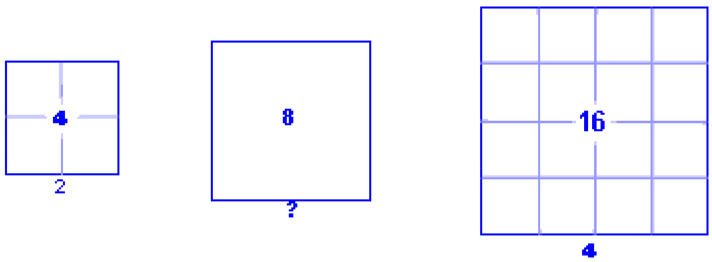
O escravo concorda que o quadrado de lado igual a 2 pés tem 4 pés^2 de área.



O escravo concorda que é possível desenhar um quadrado com 8 pés^2 de área. Afirma (erroneamente) que o lado desse quadrado tem 4 pés.

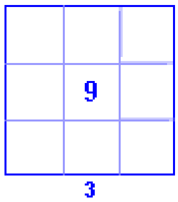


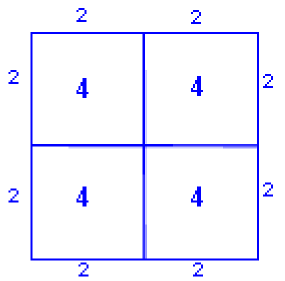
Sócrates desenha um quadrado com lado igual a 4 pés, e o escravo concorda que esse quadrado tem área igual a 16 pés^2. O escravo conclui que o quadrado com área igual a 8 pés^{2}não pode ter lado igual a 4 pés.

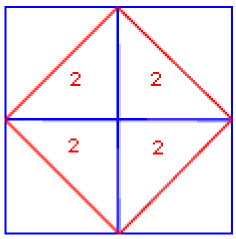


O escravo concorda que o lado do quadrado de área igual a 8 pés^2 deve ser maior do que 2 e menor do que 4. Propõe então o valor 3.

Sócrates desenha um quadrado com lado igual a 3 pés, e o escravo concorda que esse quadrado tem área igual a 9 pés^2. O escravo conclui que o quadrado com área igual a 8 pés^2 não pode ter lado igual a 3 pés. Reconhece que não sabe o valor correto.







Sócrates desenha um quadrado formado com quatro cópias do quadrado com área igual a 4 pés^2. O escravo concorda que este quadrado maior tem 16 pés^2 de área. Tomando uma diagonal de cada um dos quatro quadrados, Sócrates obtém um novo quadrado. O escravo concorda que este último tem área de 8 pés^2.

Observações finais

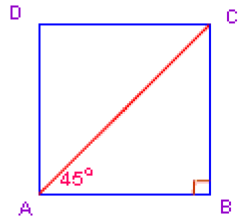
Vemos nesse diálogo de Platão um exemplo típico da nascente matemática da antiga Grécia. Trata-se de uma geometria completamente não arimetizada. Os objetos dessa geometria são pontos, linhas e figuras de duas ou três dimensões, e esses elementos são combinados, comparados, transformados.

Na linguagem matemática atual o raciocínio exposto acima pode ser sintetizado no seguinte teorema:

Teorema da duplicação do quadrado. O quadrado cujo lado é igual à diagonal de um quadrado dado tem área igual ao dobro da área deste.

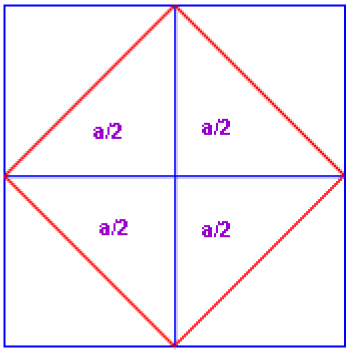
1ª Demonstração (usando a geometria não arimetizada do tempo de Platão):

Consideremos um quadrado $ABCD$ de área a. Observemos dois fatos:



1º) : Os triângulos ABC e ADC são isósceles, portanto seus ângulos agudos medem 45º cada um. O mesmo vale para os triângulos ABD e CBD .

2º) : Os triângulos ABC e ADC têm, cada um, base igual à altura e igual ao lado do quadrado. Como a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura, segue que os triângulos ABC e ADC têm áreas iguais. Assim a área de cada um é $a/2$. O mesmo vale para os triângulos ABD e CBD .



Agora dispomos quatro cópias do quadrado dado de forma a termos um quadrado maior como na figura ao lado. Consideremos as diagonais ali desenhadas. Essas diagonais têm o mesmo comprimento e formam entre si, nos pontos em que se encontram, ângulos de 90º, em virtude da propriedade 1) acima. Portanto essas diagonais formam um quadrado. Esse quadrado tem área igual a $a/2+a/2+a/2+a/2=2a$, em virtude da propriedade 2) acima.

Consequentemente o quadrado cujo lado é igual à diagonal de um quadrado dado tem área igual ao dobro da área deste. Isto termina a demonstração do teorema.

2ªDemonstração (usando nossa geometria arimetizada):

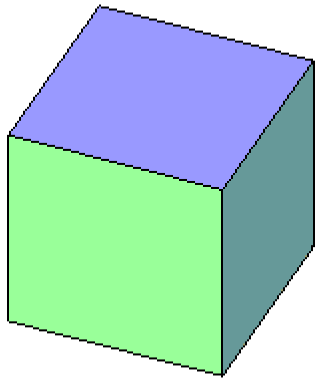
Dado um quadrado de lado l, sua diagonal mede $\sqrt{2}\, l$, em virtude do Teorema de Pitágoras. Portanto o quadrado cujo lado é esta diagonal tem área

$$(\sqrt{2}\ l)^2 = 2\, l^2,$$

que é o dobro da área l^2 do quadrado inicial. Isto termina a demonstração do teorema.

A versão tridimensional desse teorema nos leva a um famoso problema da antiguidade:

Problema da duplicação do cubo. Dado um cubo, construir o cubo cujo volume seja o dobro do volume daquele.



A solução desse problema dentro do modelo algébrico hoje utilizado é simples: para obter o lado do segundo cubo basta multiplicar o lado do primeiro por $\sqrt[3]{2}$. Entretanto, dentro do modelo da nascente matemática grega, este problema teria que ser resolvido usando apenas os instrumentos euclidianos: a régua não metrizada e o compasso. Com o desenvolvimento do conceito de número real ficou claro no século XIX que o problema da duplicação do cubo não tinha solução na geometria não arimetizada do tempo de Platão.

Referências

[1] Fowler, D. H., *The Mathematics of Plato's Academy*. Oxford, Clarendon Press, 1987.
[2] Heath, T. L., *A Manual of Greek Mathematics.* New York, Dover Publications, 1963.
[3] Platão, *Diálogos: Mênon, Banquete, Fedro.* Tradução de Jorge Paleikat. Ediouro.
[4] Platão, *Diálogos.* Volumes I e II. Tradução de Carlos Alberto Nunes. Universidade Federal do Pará,